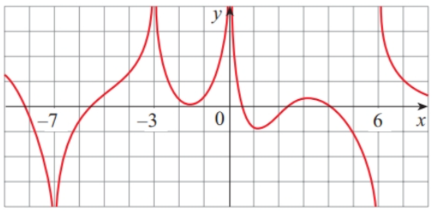
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista 1 - Módulo 1 - CM311

1. Para a função f cujo gráfico é mostrado abaixo, determine:

   (a) $\lim_{x\to -7} f(x)$ (b) $\lim_{x\to -3} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (d) $\lim_{x\to 6^-} f(x)$ (e) $\lim_{x\to 6^+} f(x)$

   (f) As equações das retas assíntotas verticais



2. Esboce o gráfico de f e use-o para determinar os valores de a para os quais $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, sendo

$$f(x) = \begin{cases} e^x\,, & \text{se } x \leq 0 \\ x-1\,, & \text{se } 0 < x < 1 \\ \ln\, x\,, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

3. Considere a função $f(x) = \dfrac{x^2+1}{3x-x^2}$, para todo $x \in Dom(f)$.

   (a) Determine o conjunto $Dom(f)$;

   (b) Avalie: (i) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (iii) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (iv) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

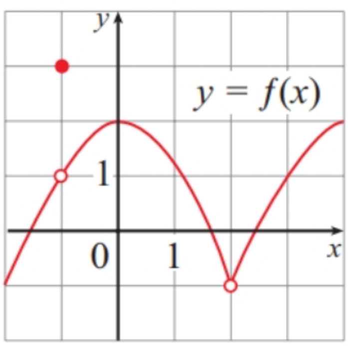
   (c) Determine as equações das retas assíntotas verticais

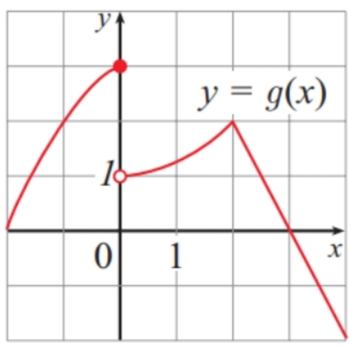
   (d) Dê um esboço do gráfico de $f(x)$

4. Os gráficos das funções f e g são dados na figura abaixo. Use-os para calcular cada limite, e caso não exista o limite, explique o porquê.

   (a) $\lim_{x\to 2} [f(x)+g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 0} [f(x)-g(x)]$ (c) $\lim_{x\to -1} [f(x)g(x)]$

   (d) $\lim_{x\to 3} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (e) $\lim_{x\to 2} [x^2\, f(x)]$ (f) $f(-1) + \lim_{x\to -1} g(x)$





5. Em cada um dos casos abaixo, determine (se possível):

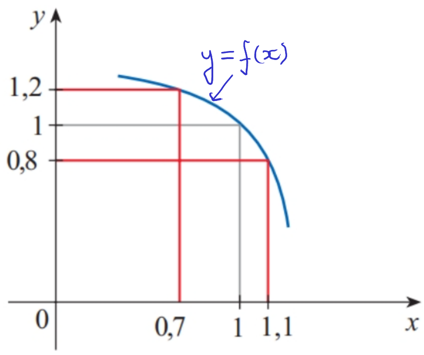
(a) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^2 - x - 6}{3x^2 + 5x - 2}$ (b) $\displaystyle\lim_{t\to 3} \frac{t^3 - 27}{t^2 - 9}$ (c) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(h-3)^2 - 9}{h}$ (d) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}}{t}$

6. Se $4\,x - 9 \le f(x) \le x^2 - 4\,x + 7$, para todo $x \ge 0$, encontre $\displaystyle\lim_{x\to 4} f(x)$.

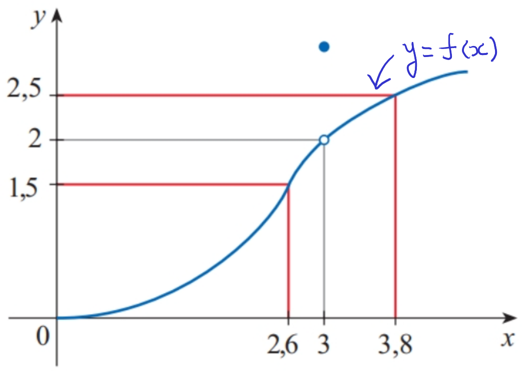
7. Mostre que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0$.

8. Mostre que $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} \frac{2\,x - 1}{\left|2\,x^3 - x^2\right|} = -\,4$.

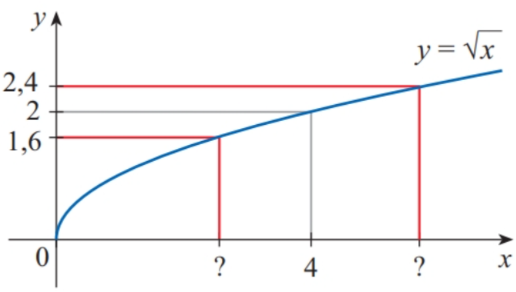
9. Use o gráfico de f para encontrar um número δ tal que se $\left|x - 1\right| < \delta$ então $\left|f(x) - 1\right| < 0,2$.



10. Use o gráfico de f para encontrar um número δ tal que se $0 < \left|x - 3\right| < \delta$ então $\left|f(x) - 2\right| < 0,5$.



11. Use o gráfico dado de $f(x) = \sqrt{x}$ para encontrar um número δ tal que se $\left|x - 4\right| < \delta$ então $\left|\sqrt{x} - 2\right| < 0,4$.



12. Determine um número δ tal que se $\left|x - 2\right| < \delta$ então $\left|4\,x - 8\right| < \varepsilon$, nos casos em que:

(i) $\varepsilon = 0,1$ (ii) $\varepsilon = 0,01$

13. Utilize a definição formal de limite (com ε e δ) para provar que:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \left(\frac{1}{2}\,x - 1\right) = 1$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \left(x^2 - 1\right) = 3$

14. Utilize a definição formal de limite infinito para provar que:

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ (b) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{1}{(x+3)^4} = +\infty$

15. Nos itens abaixo, explique por que é contínua a função dada, no intervalo I dado.

(a) $f(x) = \dfrac{2\,x+3}{x-2}\,,\qquad I = \big(2, +\infty\big)\,;$

(b) $g(x) = 2\sqrt{3-x}\,,\qquad I = \big(-\infty, 3\big]\,.$

16. Nos itens abaixo, explique por que é descontínua a função dada, no ponto a dado.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2-1}\,, & \text{se } x \neq 1 \\ 1\,, & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

(b) $g(x) = \begin{cases} \cos x\,, & \text{se } x < 0 \\ 0\,, & \text{se } x = 0 \\ 1-x^2\,, & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad a = 0$

17. Dada a função $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \le 1 \\ 1/x\,, & \text{se } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x-3}\,, & \text{se } x \ge 3 \end{cases}$ analise a continuidade lateral de f em cada um dos seus pontos de descontinuidade.

18. Determine os valores de c para os quais a função f dada por $f(x) = \begin{cases} c\,x^2 + 2\,x\,, & \text{se } x < 2 \\ x^3 - c\,x\,, & \text{se } x \ge 2 \end{cases}$

é contínua em $\big(-\infty, +\infty\big)$.

19. Mostre que a função $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2\,x}{x-2}$ tem uma descontinuidade removível no ponto 2 e determine uma função g contínua em todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x)$, para todo $x \neq 2$.

20. Use o Teorema do Valor Intermediário (TVI) para mostrar que a equação dada admite uma solução no intervalo I dado.

(a) $x^4 + x - 3 = 0\,,\quad I = \big(1, 2\big)\,;$ (b) $\sqrt[3]{x} = 1 - x\,,\quad I = \big(0, 1\big)\,.$

21. Analise os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1-x-x^2}{2\,x^2-7}$ (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{9\,x^6-x}}{x^3+1}$ (c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{9\,x^6-x}}{x^3+1}$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \big(\sqrt{9\,x^2+x} - 3\,x\big)$ (e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \big(x^4 + x^5\big)$

22. Considere a função $f(x) = \dfrac{2\,x^2+x-1}{x^2+x-2}$.

(a) Calcule: (i) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ (iii) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (iv) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

(v) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ (vi) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

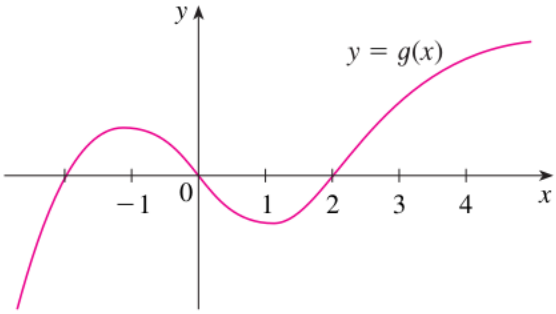
(b) Utilize os resultados obtidos em (a) para dar um esboço detalhado do gráfico de f e dê as equações das retas assíntotas.

23. Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

(a) $y = 4\,x - 3\,x^2\,,\quad (2, -4)$ (b) $y = \sqrt{x}\,,\quad (1, 1)$ (c) $y = \dfrac{2\,x+1}{x+2}\,,\quad (1, 1)$

24. Para a função g cujo gráfico é dado abaixo, organize os seguintes números em ordem crescente:

$$0\,, \qquad g'(-2)\,, \qquad g'(0)\,, \qquad g'(2)\,, \qquad g'(4)\,.$$



25. Determine os valores $f(4)$ e $f'(4)$, sabendo que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(4,3)$ também passa pelo ponto $(0,2)$.

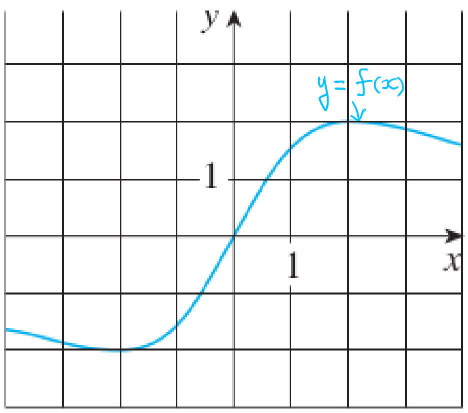
26. Em cada um dos casos abaixo, determine o número $f'(a)$ (onde a é um ponto genérico de $Dom(f)$).

(a) $f(x) = 3\,x^2 - 4\,x + 1$ (b) $f(t) = \dfrac{2\,t+1}{t+3}$ (c) $f(x) = \sqrt{1-2\,x}$

27. Determine, caso exista, o número $f'(0)$ onde $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}\,, & \text{se } x \neq 0 \\ 0\,, & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

28. Utilize o gráfico dado da função f para estimar o valor de f' em cada um dos pontos dados. Em seguida, esboce o gráfico de f'.

(a) $f'(-3)$ (b) $f'(-2)$ (c) $f'(-1)$ (d) $f'(0)$ (e) $f'(1)$ (f) $f'(2)$ (g) $f'(3)$



29. Em cada um dos casos abaixo, encontre a derivada da função dada usando a definição e dê os domínios de f e f'.

(a) $f(x) = m\,x + b$ (m e b constantes) (b) $f(t) = 5\,t - 9\,t^2$ (c) $f(x) = x + \sqrt{x}$

(d) $f(x) = \sqrt{9-x}$

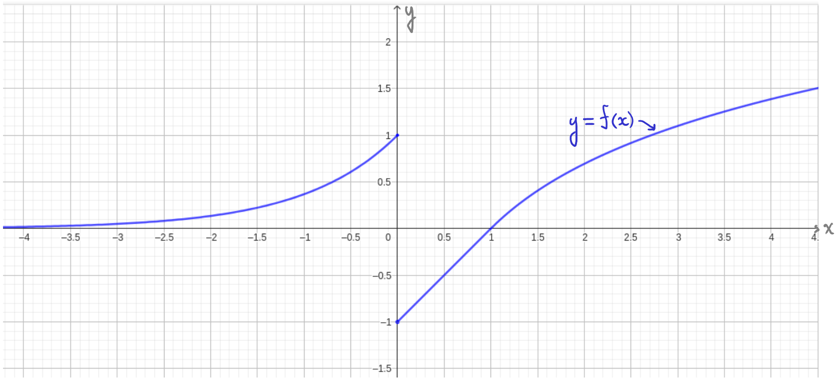
30. Mostre que a função $f(x) = \left|x-6\right|$ não derivável no ponto $x = 6$. Encontre a expressão de $f'(x)$ e dê um esboço de seu gráfico.

Respostas

1. (a) $-\infty$ (b) $+\infty$ (c) $+\infty$ (d) $-\infty$ (e) $+\infty$

   (f) $x=-7\,,\quad x=-3\,,\quad x=0\,,\quad x=6$

2. Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, para todo $a\neq 0$ $\big($note que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1$, e portanto, $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)\big)$

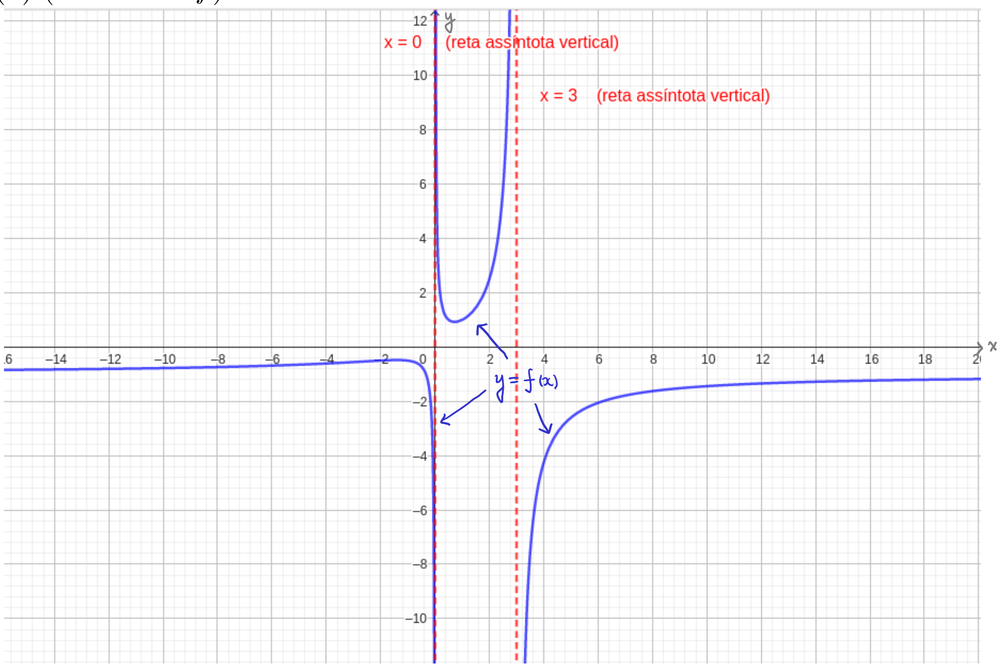


3. (a) $Dom(f)=(-\infty,0)\cup(0,3)\cup(3,+\infty)$

   (b) (i) $-\infty$ (ii) $+\infty$ (iii) $+\infty$ (iv) $-\infty$

   (c) $x=0\,,\ x=3$

   (d) (Gráfico de f)



4. (a) 1

   (b) $\nexists \lim\limits_{x\to 0}\big[f(x)-g(x)\big]$ pois $\lim\limits_{x\to 0^-}\big[f(x)-g(x)\big]=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)-\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=2-3=-1$

   e $\lim\limits_{x\to 0^+}\big[f(x)-g(x)\big]=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)-\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=2-1=1$

   (c) 2

   (d) $\nexists \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\Big($note que $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty\Big)$

   (e) -4

   (f) $f(-1)+\lim\limits_{x\to -1} g(x)=3+2=5$

5. (a) $\dfrac{5}{7}$ (b) $\dfrac{9}{2}$ (c) -6 (d) 1

6. 7

7. Dado que $-1\leq \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x}\leq 1$, para todo $x\neq 0$, tem-se que $e^{-1}\leq e^{\operatorname{sen}(\pi/x)}\leq e^{1}$, para todo $x\neq 0$, e que $\dfrac{\sqrt{x}}{e}\leq \sqrt{x}\,e^{\operatorname{sen}(\pi/x)}\leq \sqrt{x}\,e$, para todo $x>0$. Definindo-se $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{e}$, $g(x)=\sqrt{x}\,e^{\operatorname{sen}(\pi/x)}$ e $h(x)=\sqrt{x}\,e$, tem-se que $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$, para todo $x>0$. Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0=\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$, conclui-se, pelo Teorema do Confronto, que $\lim_{x\to 0^+} g(x)=0$.

8. Nota-se que $\left|2\,x^3 - x^2\right| = \left|x^2(2x-1)\right| = x^2\left|2x-1\right|$ e que $\left|2\,x-1\right| = -(2\,x-1)$, para todo $x < \dfrac{1}{2}$; disto segue que $\dfrac{2\,x-1}{\left|2x^3-x^2\right|} = -\dfrac{1}{x^2}$, para todo $x < \dfrac{1}{2}$, e assim, segue que $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{2\,x-1}{\left|2x^3-x^2\right|} = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \big(-\frac{1}{x^2}\big) = -\,4\,.$

9. $\delta = 0,1$ (ou qualquer número positivo menor)

10. $\delta = 0,4$ (ou qualquer número positivo menor)

11. $\delta = 1,44$ (ou qualquer número positivo menor)

12. (Note que $\left|4\,x-8\right| < \varepsilon \iff \left|4(x-2)\right| < \varepsilon \iff 4\left|x-2\right| < \varepsilon \iff \left|x-2\right| < \dfrac{\varepsilon}{4}$, e assim, deve-se escolher $\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{4}$)

(i) $\delta = 0,025$ (ou qualquer número positivo menor)

(ii) $\delta = 0,0025$ (ou qualquer número positivo menor)

13. (a) Considere $f(x) = \dfrac{1}{2}\,x - 1$. Deseja-se provar que $\displaystyle\lim_{x\to 4} f(x) = 1$, ou seja, que dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta > 0$ tal que se $\left|x-4\right| < \delta$ então $\left|f(x)-1\right| < \varepsilon$. Nota-se que

$$\left|f(x)-1\right| < \varepsilon \iff \left|\big(\frac{1}{2}\,x-1\big)-1\right| < \varepsilon \iff \frac{\left|x-4\right|}{2} < \varepsilon \iff \left|x-4\right| < 2\,\varepsilon\,,$$

e assim, deve-se escolher $\delta \leq 2\,\varepsilon$; desta forma, para $\left|x-4\right| < \delta$ obtém-se

$$\left|f(x)-1\right| = \left|\big(\frac{1}{2}\,x-1\big)-1\right| = \frac{\left|x-4\right|}{2} < \frac{\delta}{2} \leq \frac{2\,\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

(b) Considere $f(x) = x^2 - 1$; nota-se inicialmente que

$$\left|f(x)-3\right| = \left|(x^2-1)-3\right| = \left|x^2-4\right| = \left|x-2\right|\left|x+2\right|;$$

além disso, dado que x deve estar suficientemente próximo de -2 então pode-se considerar $-3 < x < -1$ (ou seja, que $\left|x-(-2)\right| < 1$), e assim,

$$-5 < x-2 < -3 \implies 3 < \left|x-2\right| < 5 \implies \left|x-2\right| < 5\,.$$

Portanto, admitindo-se que $\left|x-2\right| < 5$ e $\left|x+2\right| < \delta$ obtém-se

$$\left|f(x)-3\right| = \left|x-2\right|\left|x+2\right| < 5\,\delta$$

e assim, escolhendo-se $\delta \leq \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$ conclui-se que $\left|f(x)-3\right| < \varepsilon$, para todo x satisfazendo $\left|x+2\right| < \delta\,.$

14. (a) Deve-se provar que para todo $A < 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < x < \delta$ então $\ln\,x < A$. Dado que

$$\ln\,x < A \iff x < e^A\,,$$

conclui-se que basta tomar $\delta \leq e^A$ para que se tenha $\ln\,x < A$, para todo x satisfazendo $0 < x < \delta\,.$

(b) Deve-se provar que para todo $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < \left|x+3\right| < \delta$ então $\dfrac{1}{(x+3)^4} > A\,.$ Sendo assim, segue que

$$\frac{1}{(x+3)^4} > A \iff \frac{1}{\left|x+3\right|} > \sqrt[4]{A} \iff \left|x+3\right| < \frac{1}{\sqrt[4]{A}}\,.$$

Portanto, escolhendo-se $\delta \leq \dfrac{1}{\sqrt[4]{A}}$, tem-se que $\dfrac{1}{(x+3)^4} > A$, para todo x satisfazendo $0 < \left|x+3\right| < \delta\,.$

15. (a) f é uma função racional (quociente de polinômios) sendo, portanto, contínua em todo o seu domínio $Dom(f) = \big(-\infty, 2\big) \cup \big(2, +\infty\big)$; dado que o intervalo $I = \big(2, +\infty\big)$ está totalmente contido em $Dom(f)$, segue que f é contínua em tal intervalo.

(b) $Dom(g) = \big(-\infty, 3\big] = I$ e g é o produto de uma constante por uma composição de funções conínuas bem-definidas (a saber, $g(x) = h(j(x))$ onde $j(x) = 3-x$ e $h(x) = \sqrt{x}$), sendo portanto, uma função contínua em I.

16. (a) Para $x \neq \pm 1$, $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x}{x+1}$; logo, $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2} \neq f(1)$

(b) Como $\lim_{x \to 0^-} \cos x = 1$ e $\lim_{x \to 0^+} (1 - x^2) = 1$, conclui-se que $\lim_{x \to 0} g(x) = 1 \neq g(0)$.

17. f é descontínua nos pontos 1 e 3 pois não existem $\lim_{x \to 1} f(x)$ e $\lim_{x \to 3} f(x)$; de fato,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = 1 \implies \nexists \lim_{x \to 1} f(x) \ ;$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} = 0 \implies \nexists \lim_{x \to 3} f(x) \ .$$

Além disso, f é contínua à esquerda em 1 e contínua à direita em 3 pois

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 2 = f(2) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} = 0 = f(3)\,.$$

18. $c = \dfrac{2}{3}$

19. Para todo $x \neq 2$, $f(x) = \dfrac{x(x+1)(x-2)}{x-2} = x(x+1)$; logo, $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x(x+1) = 6$ e $g(x) = x(x+1)$.

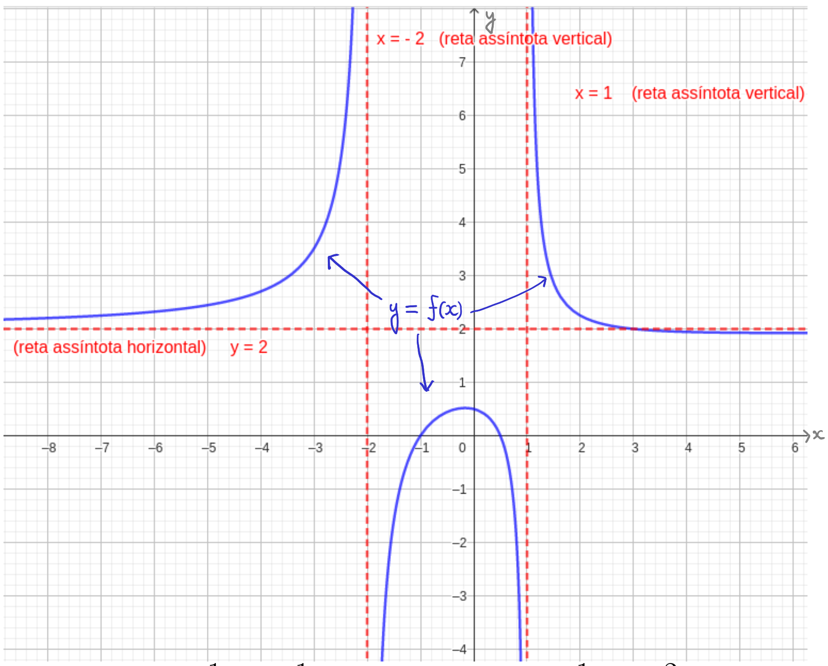
20. (a) Definindo-se $f(x) = x^4 + x - 3$, tem-se que f é contínua em I, $f(1) = -1 < 0$ e $f(2) = 15 > 0$; logo, pelo TVI, tem-se que existe $x^* \in I$ tal que $f(x^*) = 0$.

(b) Definindo-se $f(x) = \sqrt[3]{x} + x - 1$, tem-se que f é contínua em I, $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$; logo, pelo TVI, tem-se que existe $x^* \in I$ tal que $f(x^*) = 0$.

21. (a) $-\dfrac{1}{2}$ (b) 3 (c) -3 (d) $\dfrac{1}{6}$ (e) $-\infty$

22. (a) (i) $+\infty$ (ii) $-\infty$ (iii) $-\infty$ (iv) $+\infty$ (v) 2 (vi) 2

(b) retas assíntotas verticais: $x = -2$, $x = 1$; reta assíntota horizontal: $y = 2$



23. (a) $y = -8\,x + 12$ (b) $\dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{1}{2}$ (c) $y = \dfrac{1}{3}\,x + \dfrac{2}{3}$

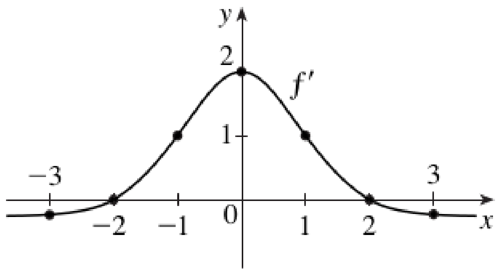
24. $g'(0) < 0 < g'(4) < g'(2) < g'(-2)$

25. $f(4) = 3$ e $f'(4) = \dfrac{1}{4}$

26. (a) $6\,a - 4$ (b) $\dfrac{5}{(a+3)^2}$ (c) $-\dfrac{1}{\sqrt{1 - 2\,a}}$

27. $f'(0) = 0$

28. (a) $-0,2$ (b) 0 (c) 1 (d) 2 (e) 1 (f) 0 (g) $-0,2$



29. (a) $f'(x) = m$, $Dom(f) = \mathbb{R} = Dom(f')$; (b) $f'(t) = 5 - 18\,t$, $Dom(f) = \mathbb{R} = Dom(f')$;

(c) $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $Dom(f) = \big[0, +\infty\big)$, $Dom(f') = \big(0, +\infty\big)$

(d) $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{9-x}}$, $Dom(f) = \big(-\infty, 9\big]$, $Dom(f') = \big(-\infty, 9\big)$

30. $f'(x) = \dfrac{x-6}{|x-6|} = \begin{cases} -1\,, & \text{se } x < 6 \\ 1\,, & \text{se } x > 6 \end{cases}$