UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

1a. Avaliação - CM311 - Cálculo 1 - Turma EST

1. Nos itens abaixo, determine o valor do limite:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 3^x}{x}$ (**10 pontos**) (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{7x - \text{tg } 3x}$ (**10 pontos**)

2. Avalie os limites abaixo e use a definição para justificar suas afirmações:

   (a) $\lim\limits_{x\to 9} \sqrt{x}$ (**10 pontos**) (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1 - x^2)$ (**10 pontos**)

3. Seja a função $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 4x}$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq 0$ e $x \neq 4$.

   (a) Determine todas as retas assíntotas do gráfico de f. (**10 pontos**)

   (b) Determine os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente. (**10 pontos**)

   (c) Determine os intervalos onde a concavidade do gráfico de f está voltada para cima e os intervalos onde a concavidade está voltada para baixo. (**10 pontos**)

   (d) Determine o conjunto $Im(f)$. (**10 pontos**)

   (e) Dê um esboço detalhado do gráfico de f. (**10 pontos**)

4. Seja a função $f(x) = \dfrac{4e^x}{1 + e^x}$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que $Im(f) \subset (\mathbf{0}, \mathbf{4})$ e use o TVI para mostrar que $(\mathbf{0}, \mathbf{4}) \subset Im(f)$. (**10 pontos**)

   (b) Determine, se possível, retas tangentes ao gráfico de f que sejam paralelas

   (i) à reta $y = x$ (**05 pontos**) (b) à reta $y = 2x$ (**05 pontos**)

   (c) Analise a concavidade do gráfico de f e determine, se possível, eventuais pontos de inflexão. (**10 pontos**)

Solução 1: (a) Nota-se que o 3° *Limite Fundamental do Cálculo* estabelece que $\lim_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$ e assim, fazendo-se $h = x\ \ln 2$ e em seguida, $h = x\ \ln 3$, obtém-se que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln 2^x}-e^{\ln 3^x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x\ \ln 2}-1)-(e^{x\ \ln 3}-1)}{x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h/\ln 2}-\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h/\ln 3}=(\ln 2)\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}-(\ln 3)\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=\ln 2-\ \ln 3=\ \ln\ \frac{2}{3}\,.$$

$\big[$Note que este limite é igual a $f'(0)$, onde $f(x) = 2^x - 3^x$.$\big]$

(b) Nota-se que o 1° *Limite Fundamental do Cálculo* diz que $\lim_{h\to 0}\dfrac{\text{sen } h}{h}=1$ e assim segue que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 2x}{7x-\ \text{tg } 3x}=\lim_{x\to 0}=\lim_{x\to 0}\left\{2\frac{\text{sen } 2x}{2\,x}\cdot\frac{1}{(7-3\frac{\text{tg } 3x}{3\,x}}\right\}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 2x}{2\,x}\cdot\frac{1}{(7-3\lim_{x\to 0}\dfrac{\text{sen } 3x}{3x}\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos\, 3x})}=2\cdot\frac{1}{(7-3\cdot 1\cdot 1)}=\frac{1}{2}\,.$$

Solução 2: (a) Deve-se mostrar que $\lim_{x\to 9}\sqrt{x}=3$, ou seja, que para todo $\varepsilon>0$ dado, existe $\delta>0$, $\delta=\delta(\varepsilon)$ tal que se $|x-9|<\delta$ então $|\sqrt{x}-3|<\varepsilon$. Tem-se que:

$$|\sqrt{x}-3|=\Big|(\sqrt{x}-3)\frac{(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}+3}\Big|=|x-9|\frac{1}{\sqrt{x}+3}<|x-9|\cdot 1<\delta=\varepsilon$$

visto que $\sqrt{x}+3\geq 3$ e assim, segue $\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}\leq\dfrac{1}{3}<1$, para todo $x\geq 0$. Portanto, deve-se escolher $\delta=\varepsilon$ (ou ainda, qualquer outro valor $\delta<\varepsilon$), e assim,

$$|x-9|<\delta\implies|\sqrt{x}-3|=|x-9|\frac{1}{\sqrt{x}+3}<|x-9|\cdot 1<\delta=\varepsilon\,.$$

(b) Deve-se mostrar que $\lim_{x\to+\infty}(1-x^2)=-\infty$, ou seja, que para todo $M>0$ dado, existe $A>0$, $A=A(M)$ tal que se $x>A$ então $(1-x^2)<-M$. É imediato que

$$(1-x^2)<-M\iff x^2-1>M\iff x^2>M+1\iff x>\sqrt{M+1}\qquad\text{(pois } x\geq 0\text{)}.$$

Portanto, deve-se escolher $A=\sqrt{M+1}$ (ou qualquer outro número maior que $\sqrt{M+1}$) pois assim,

$$x>A\implies x>\sqrt{M+1}\implies x^2>M+1\implies x^2-1>M\implies 1-x^2<-M\,.$$

Solução 2: (a) Nota-se que $f(x)=\dfrac{4}{x^2-4x}=\dfrac{4}{x(x-4)}$ e portanto, as retas $x=0$ e $x=4$ são candidatas a retas assíntotas verticais do gráfico de f. Analisemos os limites laterais para verificar se ocorrem explpsões no gráfico de f nas proximidades desses dois pontos.

- $$x\to 0^+\implies x-4\to(0-4)^+=(-4)^+\implies x(x-4)\to 0^-\implies\frac{4}{x(x-4)}\to-\infty$$

$$\implies\lim_{x\to 0^+}f(x)=-\infty\,,$$

e assim, $x=0$ é reta assíntota vertical do gráfico de f. De modo análogo, faz-se:

- $$x\to 4^+\implies x-4\to(4-4)^+=0^+\implies x(x-4)\to 0^+\implies\frac{4}{x(x-4)}\to+\infty$$

$$\implies \lim_{x\to 4+} f(x) = +\infty\,,$$

e portanto, $x = 4$ é outra reta assíntota vertical do grafico de f.

Para determinar retas as assíntotas horizontais, faz-se:

- $$x \to +\infty \implies x-4 \to +\infty \implies x(x-4) \to +\infty \implies \frac{4}{x(x-4)} \to 0^+ \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,,$$

e disto se conclui que a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f. Por sua vez,

- $$x \to -\infty \implies x-4 \to -\infty \implies x(x-4) \to +\infty \implies \frac{4}{x(x-4)} \to 0^+ \implies \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,,$$

confirmando que f admite apenas uma reta assíntota horizontal.

(b) Deve-se estudar o sinal da derivada primeira de f; faz-se então:

$$f'(x) = \frac{(4)'(x^2-4x) - 4(x^2-4x)'}{(x2-4x)^2} = \frac{0\cdot(x^2-4x) - 4(2x-4)}{(x^2-4x)^2} = \frac{8(2-x)}{(x^2-4x)^2}\,;$$

dado que o denominador da fração é sempre positivo, então é o numerador que determina o sinal da fração. Portanto, conclui-se que:

$$f'(x) > 0 \iff 2-x > 0 \iff x < 2 \qquad \text{e} \qquad f'(x) < 0 \iff 2-x < 0 \iff x > 2\,.$$

Logo, tem-se que:

$$f(x) \text{ é crescente nos intervalos } (-\infty, 0) \text{ e } (0, 2)$$

(mas não é crescente na união desses intervalos) e também

$$f(x) \text{ é decrescente nos intervalos } (2, 4) \text{ e } (4, +\infty)$$

(mas não é decrescente na união desses dois intervalos).

(c) Para estudar as concavidades do gráfico de f analisa-se o sinal de $f''(x)$; faz-se então:

$$f''(x) = 8\Big(\frac{2-x}{(x^2-4x)^2}\Big)' = 8\frac{(2-x)'(x^2-4x)^2 - (2-x)\big((x^2-4x)^2\big)'}{(x^2-4x)^4}$$

$$= 8\frac{(-1)(x^2-4x)^2 - (2-x)2(x^2-4x)^1(2x-4)}{(x^2-4x)^4} = 8\frac{(x^2-4x)^1\big[(-1)(x^2-4x)^1 - (2-x)2(2x-4)\big]}{(x^2-4x)^4}$$

$$= 8\frac{-x^2+4x+4x^2-16x+16}{(x^2-4x)^3} = 8\frac{3x^2-12x+16}{(x^2-4x)^3}\,.$$

Nota-se então que $3x^2 - 12x + 16 = (3x^2 - 2\cdot(3x)\cdot 2 + 4) + 12 = (3x-2)^2 + 12 > 0$, ou seja, o numerador da fração acima é sempre positivo e portanto, o sinal da fração é determinado pelo denominador, e mais precisamente, por (x^2-4x). [Outra forma de notar que o numerador é sempre positivo é observando que o discriminante da equação $3x^2 - 12x + 16 = 0$ é $\Delta = -48$ e $f(0) = 16 > 0$, e portanto, o gráfico da função do numerador está sempre acima do eixo$-x$.]

Dado que $x^2 - 4x$ tem raízes em $x = 0$ e $x = 4$, vê-se que $x^2 - 4x > 0$ para $x < 0$ e $x > 4$, e que $x^2 - 4x < 0$ para $0 < x < 4$; Disto se conclui que:

$$f''(x) > 0 \ \text{ se } \ x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \qquad \text{e} \qquad f''(x) < 0 \ \text{ se } \ x \in (0, 4)\,.$$

Portanto, a concavidade do gráfico de f é voltada para cima em $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ e voltada para baixo em $(0, 4)$.

(d) Nota-se inicialmente que se $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ então $f(x) \in (0, +\infty)$. De fato, dado que $\lim_{x\to 4^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ então, como f é decrescente no intervalo $(4, +\infty)$ conclui-se que $f(x) \in (0, +\infty)$.

Por outro lado, se $d \in (0, +\infty)$ existe $a > 4$ suficientemente grande tal que $0 < f(a) < d$ (pois $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$) e também existe $b > 4$ suficientemente próximo de 4 tal que $f(b) > d$ (pois $\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$) e portanto, $d \in (f(b), f(a))$ (ou seja, o valor d está entre $f(b)$ e $f(a)$). Portanto, como f é uma função contínua, o *Teorema do Valor Intermediário* garante que existe c entre a e b tal que $f(c) = d$, ou seja, $d \in Im(f)$, e assim, como $d > 0$ é arbitrário, conclui-se que $(0, +\infty) \subset Im(f)$. De modo análogo mostra-se que se $x \in (-\infty, 0)$ então $f(x) \in (0, +\infty)$.

Em seguida, mostra-se que se $x \in (0, 4)$ então $f(x) \in (-\infty, -1]$. De fato, nota-se que $f(x) = \dfrac{4}{g(x)}$ onde $g(x) = x^2 - 4x$ é uma função quadrática com raízes em $x = 0$ e $x = 4$, $g(x)$ é negativa no intervalo $(0, 4)$ e $\min_{0<x<4} g(x) = -4$; disto se conclui que $f(x)$ é negativa no intervalo $(0, 4)$ e que $\max_{0<x<4} f(x) = \dfrac{4}{\min_{0<x<4} g(x)} = -\dfrac{4}{4} = -1$.

Nota-se então que, como $g(x)$ assume todos os seu valores no intervalo $[-4, 0)$ quando $x \in (0, 2]$, então $f(x)$ assume todos os valores no intervalo $(-\infty, -1]$ quando $x \in (0, 2]$; de modo similar ao feito anteriormente, usando-se o *Teorema do Valor Intermediário* mostra-se que $(-\infty, -1] \subset Im(f)$. Conclui-se que

$$Im(f) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty).$$

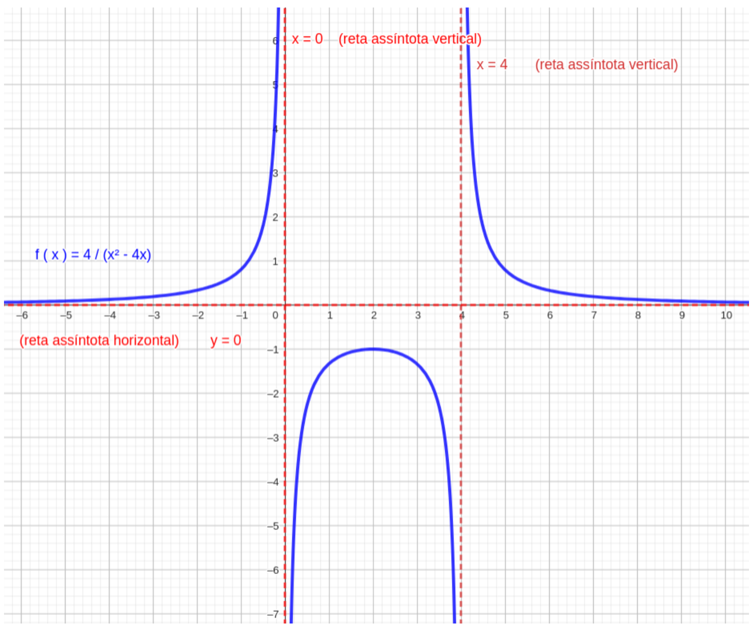
(e) Para justificar a construção do gráfico de f resta mostrar que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty.$$

Tem-se que:

- $x \to 0^- \implies x - 4 \to (0-4)^- = (-4)^- \implies x(x-4) \to 0^+ \implies \dfrac{4}{x(x-4)} \to +\infty$
  $\implies \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$;
- $x \to 4^- \implies x - 4 \to (4-4)^- = 0^- \implies x(x-4) \to 0^- \implies \dfrac{4}{x(x-4)} \to -\infty$
  $\implies \lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$;

O gráfico de f é mostrado na figura abaixo.



Solução 4: (a) **Este item foi anulado; todos receberão os 10 pontos correspondentes**.

Para mostrar que $Im(f) \subset (0,4)$ nota-se que

$$0 < e^x < e^x + 1 \implies 0 < \frac{e^x}{e^x + 1} < 1 \implies 0 < f(x) < 1\,,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e, portanto, $Im(f) \subset (0,4)$.

Para mostrar o outro lado da inclusão, nota-se inicialmente que f é uma função crescente pois

$$f'(x) = 4\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)' = \frac{(e^x)'(1+e^x) - e^x(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} = 4\frac{e^x(1+e^x) - e^x e^x}{((1+e^x)^2}$$

$$= 4\frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0\,,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, tem-se que

$$\lim_{x\to+\infty} 4\,\frac{e^x}{1+e^x} = 4\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x/e^x}{1/e^x + e^x/e^x} = 4\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+1/e^x} = 4$$

e também,

$$\lim_{x\to-\infty} 4\,\frac{e^x}{1+e^x} = 4\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 0$$

(pois $x \to -\infty \implies -x \to +\infty \implies 1 + e^{-x} \to +\infty$).

Disto segue que para todo $d \in (0,4)$ tem-se que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(a) < d < f(b)\,;$$

dado que f é uma função contínua, o *Teorema do Valor Intermediário* garante que existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$, ou seja, $d \in Im(f)$. Dado que $d \in (0,4)$ é arbitrário, conclui-se $(0,4) \subset Im(f)$ (e assim, $Im(f) = (0,4)$).

(b) (i) Se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ seja paralela à reta $y = x$ então o coeficiente angular de tal reta tangente deve ser igual a 1, e assim, deve ser:

$$f'(a) = 1 \iff \frac{4e^a}{(1+e^a)^2} = 1 \iff 4e^a = (1+e^a)^2 \iff 4e^a = 1 + 2e^a + (e^a)^2$$

$$\iff (e^a)^2 - 2e^a + 1 = 0 \iff (e^a - 1)^2 = 0 \iff e^a = 1 \iff a = 0\,.$$

Portanto, para $a = 0$, tem-se que $f'(a) = f'(0) = \dfrac{4e^0}{(1+e^0)^2} = 1$.

(ii) Nota-se que não existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f'(a) = 2$ pois

$$f'(a) = 2 \iff \frac{4e^a}{(1+e^a)^2} = 2 \iff 2e^a = (1+e^a)^2 = 1 + 2e^a + e^{2a} \iff 0 = 1 + e^{2a} > 1\,.$$

[Nota-se que

$$(e^x - 1)^2 \geq 0 \implies e^{2x} - 2e^x + 1 \geq 0 \implies (e^{2x} + 2e^x + 1) - 4e^x \geq 0 \implies (e^x + 1)^2 \geq 4e^x$$

$$\implies 0 < \frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1 \implies 0 < f'(x) \geq 1\,,$$

e portanto, a maior inclinação possível para uma reta tangente nesse caso é 1.]

(c) O estudo da concavidade é feito analisando-se o sinal de $f''(x)$; faz-se então:

$$f''(x) = 4\frac{(e^x)'(1+e^x)^2 - e^x\big((1+e^x)^2\big)'}{(1+e^x)^4} = 4\frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x 2(1+e^x)^1 e^x}{(1+e^x)^4}$$

$$= 4\frac{(1+e^x)^1\left[e^x(1+e^x)^1 - 2e^{2x}\right]}{(1+e^x)^4} = 4\frac{e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^3} = 4\frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}\,.$$

Disto segue que $f''(x) > 0$ se $x < 0$ e $f''(x) < 0$ se $x > 0$ logo, a concavidade do gráfico de f é voltada para cima no intervalo $(-\infty, 0)$ e é voltada para baixo no intervalo $(0, +\infty)$; assim sendo, ocorre mudança na concavidade do gráfico de f ao se passar de um lado do ponto $x = 0$ para outro lado desse ponto, conclui-se que $x = 0$ é o único ponto de inflexão do gráfico de f.

A título de ilustração os gráficos de f e suas derivadas são mostrados na figura abaixo.