LISTA DE EXERCÍCIOS - INDUÇÃO MATEMÁTICA

PET ESTATÍSTICA UFPR

1. Prove por indução a validade das fórmulas abaixo:

a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

i) $n = 1 \rightsquigarrow 1^2 = \frac{1.(2).(3)}{6} = 1$

ii) $1^2 + 2^2 + \ldots + K^2 = \frac{K(K+1).(2K+1)}{6}$ suponhamos que vale para K

Vamos provar que vale para $K+1$

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + K^2 + (K+1)^2}_{} = \frac{(K+1)(K+2).(2(K+1)+1)}{6}$$ $\rightsquigarrow$ Queremos chegar nisso

$$\frac{K.(K+1).(2K+1)}{6} + K^2 + 2K + 1 = \frac{K.(K+1)(2K+1) + 6K^2 + 12K + 6}{6} =$$

$$= \frac{(K^2+K).(2K+1) + 6K^2 + 12K + 6}{6} = \frac{2K^3 + K^2 + 2K^2 + K + 6K^2 + 12K + 6}{6} =$$

$$= \frac{2K^3 + 9K^2 + 13K + 6}{6} = \frac{(K^2 + 2K + K + 2).(2K+3)}{6} = \frac{(K+1).(K+2).(2(K+1)+1)}{6}$$ //

b) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

i) $n = 1 \quad \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1+1}$ ✓

ii) Supomos que vale para $K \Rightarrow \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{K(K+1)} = \frac{K}{K+1}$

Agora vamos provar para $K+1$

$$\underbrace{\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{K.(K+1)}}_{} + \frac{1}{(K+1).(K+2)} = \frac{K+1}{K+2}$$ $\rightsquigarrow$ Queremos chegar nisso

$$\frac{K}{K+1} + \frac{1}{(K+1).(K+2)} = \frac{K.(K+2)+1}{(K+1).(K+2)} = \frac{K^2+2K+1}{(K+1)(K+2)} =$$

$$= \frac{(K+1)^2}{(K+1).(K+2)} = \frac{K+1}{K+2}$$ //

c) $1 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$

i) $n = 1 \Rightarrow -1^{1-1} . 1^2 = (-1)^{1-1} . \frac{1(1+1)}{2}$

$1 = 1$

ii) Suponhamos que vale para K

$1 - 2^2 + 3^2 + \ldots + (-1)^{K-1} . K^2 = (-1)^{K-1} . \frac{K(K+1)}{2}$

Vamos provar para K+1

Queremos chegar nisso

$\underbrace{1 - 2^2 + 3^2 + \ldots + (-1)^{K-1} . K^2}_{(-1)^{K-1} . \frac{K.(K+1)}{2}} + (-1)^K . (K+1)^2 = (-1)^K . \frac{(K+1).(K+2)}{2}$

$(-1)^{K-1} . \frac{K.(K+1)}{2} + (-1)^K . (K+1)^2 =$

$= \frac{(-1)^{K-1} . K(K+1) + 2 . (-1)^K . (K+1)^2}{2} = \frac{(-1)^K . (-1)^{-1} . (K^2+K) + 2 . (-1)^K . (K^2+2K+1)}{2}$

$= \frac{(-1)^K . [(-K^2-K) + 2K^2 + 4K + 2]}{2} =$

$= \frac{(-1)^K . [K^2 + 3K + 2]}{2} = \frac{(-1)^K . (K+1).(K+2)}{2}$ //

2. Mostre, por indução, que a soma dos cubos de três inteiros positivos consecutivos é um múltiplo de 9.
Observação. Lembre-se que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9x$

i) $n = 1$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = 9x$

$1 + 8 + 27 = 9x$

$36 = 9x$

$x = 4$ $\therefore$ é válido

ii) Suponhamos para $n = K$

$K^3 + (K+1)^3 + (K+2)^3 = 9x$

Vamos provar para K+1

$\underbrace{K^3 + (K+1)^3} + (K+2)^3 = 9x$

$9x - K^3 + (K^3 + 3.K^2.3 + 3.K.3^2 + 3^3) =$

$= 9x + 9K^2 + 27K + 27 = 9.(x + K^2 + 3K + 3)$

↳ logo é múltiplo de 9

3. Prove, usando indução, que para qualquer n natural, $\prod_{i=1}^{n} a_i^m = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^m$

i) $n = 1 \Rightarrow a_1^m = (a_1)^m = a_1^m$ $\therefore$ Vale

ii) Suponhamos para K

$$a_1^m \cdot a_2^m \cdot \cdots \cdot a_K^m = (a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_K)^m$$

Agora iremos provar para $K+1$

$$a_1^m \cdot a_2^m \cdot \cdots \cdot a_K^m \cdot a_{K+1}^m = (a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_K \cdot a_{K+1})^m$$

↳ Queremos chegar nisso

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_K)^m \cdot a_{K+1}^m = (a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_K \cdot a_{K+1})^m$$

$\therefore$ é válido