LISTA DE EXERCÍCIOS - TEORIA DE CONJUNTOS

{ ! TENTE RESOLVER PREVIAMENTE ! }

PET ESTATÍSTICA UFPR

1. Verifique se P é uma partição do conjunto dos números inteiros.

a) $P = \{R_0, R_1, R_2\}$ em que R_i é o conjunto dos inteiros que tem resto i na divisão por 3, $i = \{1, 2, 3\}$.

$i = \{1,2,3\}$

$z \;\underline{|3}$ → divisão por 3

$i \quad q$

↳ resto i

$3.q + i = z \;,\; z \in \mathbb{Z}$

Uma partição de qualquer conjunto só contém conjuntos NÃO vazios. Nesse caso, o resto $i=3$ na divisão por 3 é impossível, logo o conjunto R_2 é vazio. Assim, P não é partição dos $\mathbb{Z}$ (inteiros).

Possivelmente, $i = \{0,1,2\}$ e não $\{1,2,3\}$, por erro de digitação. Aqui:

R_0: $z_0 = 3q$

R_1: $z_1 = 3q + 1$

R_2: $z_2 = 3q + 2$

todos não vazios ✓

Ex.:

$z_0 = 6 = 3.2 \;,\; i = 0$

$z_1 = 10 = 3.3 + 1,\; i = 1$

$z_2 = 5 = 3.1 + 2,\; i = 2$

(1) União = P

$R_0 \cup R_1 \cup R_2 = P$ ✓ : são os ÚNICOS casos possíveis.

(2) Interseção = $\emptyset$ (disjunção)

$R_0 \cap R_1 \cap R_2 = \emptyset$ ✓ : não há divisão por 3 com restos distintos.

Dessa forma, com $i = \{0,1,2\}$, P é partição de $\mathbb{Z}$.

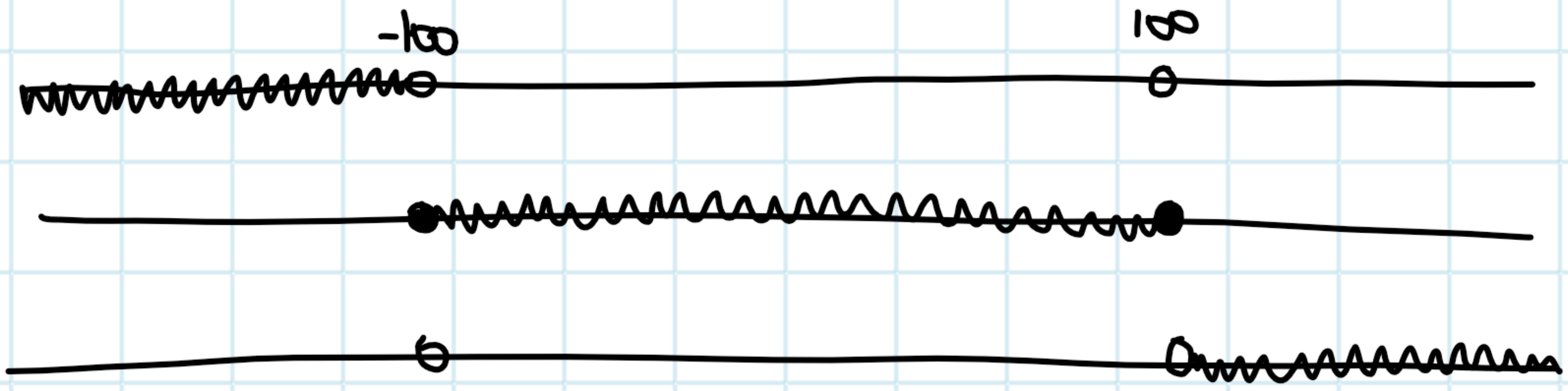
b) $P = \{A, B, C\}$ em que A é o conjunto dos inteiros menores que -100, B é o conjunto dos inteiros com valor aboluto menor ou igual a 100 e C é o conjunto dos inteiros maiores que 100.

$P = \{A, B, C\}$

$A = \{z \in \mathbb{Z},\; z < -100\}$:

$B = \{z \in \mathbb{Z},\; |z| \leq 100\}$:

$C = \{z \in \mathbb{Z},\; z > 100\}$:



→ $|z| \leq 100 = -100 \leq z \leq 100$

↳ sem interseção!

$A, B, C \neq \emptyset$

(1) $A \cup B \cup C = P$ ✓

(2) $A \cap B \cap C = \emptyset$ ✓

2. Prove que:

a) $A \subset B \Rightarrow A \times C \subset B \times C$

$(a,c) \in A\times C \Rightarrow a \in A$ e $c \in C$

$\overset{A\subset B}{\Rightarrow} a \in B$ e $c \in C$

$\Leftrightarrow (a,c) \in B \times C$

Logo, $A \subset B \Rightarrow A\times C \subset B \times C$//

b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$(x,y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ e $y \in (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A$ e ($y \in B$ ou $y \in C$)

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$

$\Leftrightarrow [(x,y) \in A\times B] \cup [(x,y) \in A \times C]$

$\Leftrightarrow (A\times B) \cup (A \times C)$//

* Para uma igualdade de conjuntos, como na letra b) e c), devemos nos preocupar com provar a ida e a volta!

c) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

$(x,y) \in A \times (B - C) \Leftrightarrow x \in A$ e $y \in (B-C)$

$\Leftrightarrow x \in A$ e ($y \in B$ e $y \notin C$)

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \notin C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \notin C)$

$\Leftrightarrow [(x,y) \in A \times B] \cap [(x,y) \notin A \times C]$

$\Leftrightarrow (A \times B) - (A \times C)$//

3. Prove que $A \cup (B \cap A^C)^C = A \cup B^C$

$A \cup (B^C \cup A) = A \cup B^C$

$A \cup B^C \cup A = A \cup B^C$

$A \cup A \cup B^C = A \cup B^C$

$A \cup B^C = A \cup B^C$//

4. Prove que $[(A \cap B)^C \cup B]^C = \varnothing$

$(A \cap B) \cap B^C = \varnothing$

$A \cap B \cap B^C = \varnothing$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

$\varnothing = \varnothing$//

5. Seja $D = \{1, 3, \{1, 2, 3\}\}$, determine $P(D)$.

$2^3 = 8$ subconjuntos

$P(D) = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{\{1,2,3\}\}, \{1,3\}, \{1,\{1,2,3\}\}, \{3,\{1,2,3\}\}, D\}$

6. Seja $A = \{a, b\}$, determine $P(P(A))$.

$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, A\}$ $A = \{a,b\}$ $\rightarrow 2^{4 \text{ elementos}} = 16$ subconjuntos para $P(P(A))$

$P(P(A)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a,b\}\}, \{\varnothing, \{a\}\}, \{\varnothing, \{b\}\}, \{\varnothing, \{a,b\}\}, \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \{a,b\}\},$

$\{\{b\}, \{a,b\}\}, \{\varnothing, \{a\}, \{b\}\}, \{\varnothing, \{b\}, \{a,b\}\}, \{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}\},$

$\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}\}$ $\rightarrow 16$ subconjuntos//

$P(A)$

7. Mostre que se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são elementos de uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ então $\cap_{i=1}^n A_i$ também pertence à $\mathcal{F}$.

$\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ Queremos provar: $\cap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{F}$

$\cap_{i=1}^n A_i = (\cup_{i=1}^n A_i^c)^c$ → vamos partir dessa ideia

* Se $A_i \in \mathcal{F}$: $A_i^c \in \mathcal{F}$.
* $\cup_{i=1}^n A_i^c \in \mathcal{F}$, pois $A_1^c, A_2^c, \ldots, A_n^c \in \mathcal{F}$
* $(\cup_{i=1}^n A_i^c)^c = \cap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$. //

8. Sendo A, B e C subconjuntos quaisquer expresse em notação matemática:
a) Estão em A e B, mas não estão em C $(x,y) \in A\cap B\cap C^c = A\cap B\cap C^c$
b) Não estão em nenhum deles $(x,y) \notin A\cup B\cup C = (A\cup B\cup C)^c$
c) Estão na intersecção dos 3 conjuntos e no complementar de A.

$(x,y) \in A\cap B\cap C\cap A^c = \underbrace{A\cap A^c}_{\varnothing}\cap B\cap C$ = impossível pela interseção com o conjunto vazio.

9. Verifique formalmente que:
a) $A \triangle B = B \triangle A$

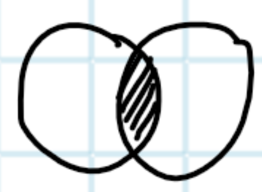
$(A-B)\cup(B-A) \iff (x\in A \text{ e } x\notin B)\cup(x\in B \text{ e } x\notin A)$
$\iff (x\in B \text{ e } x\notin A)\cup(x\in A \text{ e } x\notin B)$: trocamos de ordem pela comutatividade
$\iff (B-A)\cup(A-B)$
$\iff B\triangle A$ //

b) $(A \triangle B) \cup (A\cap B) = A\cup B$

$(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B) \iff (x\in A \text{ e } x\notin B)\cup(x\in B \text{ e } x\notin A)\cup(A\cap B)$
$\iff (x\in A)\cup(x\in B)\cup(A\cap B)$
$\iff (A\cup B)\cup(A\cap B)$
$\iff (A\cup B)$ //

$(A\triangle B)$

$(A\cap B)$



$(A\triangle B)\cup(A\cap B)$.

*Diagrama de Venn NÃO é prova! Mas é ótimo para visualizar.

c) $[(A\cap B^C\cap C)\cup(A^C\cap B\cap C)]\cap(A\cap B\cap C^C)\varnothing$

CORREÇÃO:

$\underbrace{[(A\cap B^c\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C)]\cap(A\cap B\cap C^c)}$ $= \varnothing$ → só troquei a ordem pra visualizar melhor o próximo passo

$(A\cap B\cap C^c)\cap[(A\cap B^c\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C)] \iff [(A\cap B\cap C^c)\cap(A\cap B^c\cap C)]\cup[(A\cap B\cap C^c)\cap(A^c\cap B\cap C)]$: distributiva

$\iff (A\cap B\cap C^c\cap A\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B\cap C^c\cap A^c\cap B\cap C)$
$\iff (A\cap B\cap B^c\cap C\cap C^c)\cup(A\cap A^c\cap B\cap C\cap C^c)$
$\iff (x\in A \text{ e } \underbrace{x\in B \text{ e } x\in B^c}_{\varnothing} \text{ e } \underbrace{x\in C \text{ e } x\in C^c}_{\varnothing})\cup(\underbrace{x\in A \text{ e } x\in A^c}_{\varnothing} \text{ e } x\in B \text{ e } \underbrace{x\in C \text{ e } x\in C^c}_{\varnothing})$
$\iff (x\in A \text{ e } x\in\varnothing \text{ e } x\in\varnothing)\cup(x\in\varnothing \text{ e } x\in B \text{ e } x\in\varnothing)$
$\iff (\underbrace{x\in A \text{ e } x\in\varnothing}_{\varnothing})\cup(\underbrace{x\in B \text{ e } x\in\varnothing}_{\varnothing})$
$\iff (x\in\varnothing)\cup(x\in\varnothing)$
$\iff \varnothing$ //

10. Sejam A, B e C conjuntos com $A\cap B\cap C=\varnothing$. Prove ou refute $|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|$.

$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|$ → as barras são a cardinalidade

$(A\cup B\cup C)-(A\cap B)-(A\cap C)-(B\cap C)+\cancel{(A\cap B\cap C)}^{\varnothing} = |A|+|B|+|C|-(A\cap B)-(A\cap C)-(B\cap C)$ //

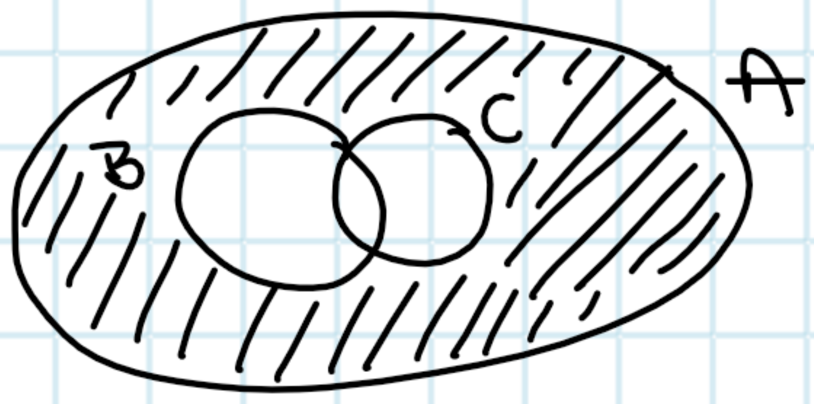
Se $(A\cap B)=(A\cap C)=(B\cap C)=\varnothing$, então $|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|$. Caso não, a afirmação é falsa.

Caso da questão 11: 11. Sejam A, B e C conjuntos dois a dis disjuntos. Prove ou refute $|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|$. → dois → Aqui, é verdadeira.

12. Sejam os conjuntos A, B e C. Mostre que $\underbrace{A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)}_{(I)}$ e $\underbrace{A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)}_{(II)}$. Ilustre no diagrama de Venn.

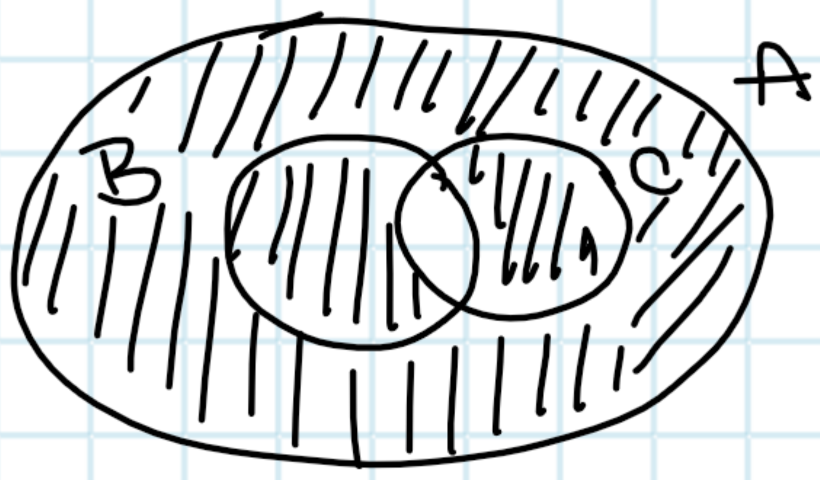
(I) $\underbrace{A-(B\cup C)}=(A-B)\cap(A-C)$

$x\in A$ e $x\notin(B\cup C)=x\in A$ e $x\notin B$ e $x\notin C=x\in A$ e $x\notin B$ e $x\in A$ e $x\notin C=(A-B)\cap(A-C)$



(II) $\underbrace{A-(B\cap C)}=(A-B)\cup(A-C)$

$x\in A$ e $x\notin(B\cap C)=x\in A$ e $x\notin B$ ou $x\notin C=x\in A$ e $x\notin B$ ou $x\in A$ e $x\notin C=(A-B)\cup(A-C)$



Bons Estudos