Segunda Lista - Lógica

1.

a) $[A \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow (A \rightarrow B)$

I. $A \rightarrow (A \rightarrow B)$
II. A
Por II. A é verdade, então em I por Modus Ponens, temos
III. $A \rightarrow B$ é verdadeiro ; ∴ argumento é válido

b) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
I. $(A \rightarrow B)$
II. $(B \rightarrow C)$
III. A
Por III. A é verdade, então em I. por MP podemos inferir que B é verdade. Se B é verdade, então em II por MP C é verdade. Se A é verdade e C é verdade, então $A \rightarrow C$ é verdade, logo o argumento é válido.

c) $(\sim A \vee B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
I. $\sim A \vee B$
II. $B \rightarrow C$
III. A
Por III. A é verdade, e ~A é falso ; como em I. $\sim A \vee B$ é verdade e ~A é falso, então B deve ser verdade ; se B é verdade e II. $B \rightarrow C$ é verdade, por MP, C é verdade ; Se A e C é verdade, então $A \rightarrow C$ é verdade, logo o argumento é válido.

d) $(A \to B) \land (\sim C \lor A) \land C \to B$

Suponhamos que $(A \to B) \land (\sim C \lor A) \land C$ é verdade, por simplificação temos que

I. $A \to B$ é verdade

II. $\sim C \lor A$ é verdade

III. C é verdade

Se em III. C é verdade, então $\sim C$ é falso;

Se em II. $\sim C \lor A$ é verdade, e $\sim C$ é falso, então A é verdade;

Se em I. $A \to B$ é verdade e A é verdade, por MP, B é verdade. ∴ argumento é válido.

e) $(J \to I) \land (F \lor \sim I) \land J \to F$

Suponhamos $(J \to I) \land (F \lor \sim I) \land J$ é verdade, por simplificação temos que

I. $J \to I$ é verdade

II. $F \lor \sim I$ é verdade

III. J é verdade

Se em III J é verdade e em I $J \to I$ é verdade, então por Modus Ponens, I é verdade; se I é verdade então $\sim I$ é falso; se $\sim I$ é falso e II. $F \lor \sim I$ é verdade, por disjunção F é verdade; ∴ Argumento é válido

f) $A \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge C))$

I. $A \wedge (B \rightarrow C)$
II. Suponhamos B verdade
Se I. é verdade, por simplificação, temos
III. A é verdade
IV $B \rightarrow C$ é verdade
Se B é verdade, em IV $B \rightarrow C$ é verdade, por MP, podemos dizer que C é verdade; Se B é verdade e A é verdade e C é verdade, então $B \rightarrow (A \wedge C)$ é verdade; portanto o argumento é válido

g) $B \wedge [(B \wedge C) \rightarrow \sim A] \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow \sim A$

Suponhamos $B \wedge [(B \wedge C) \rightarrow \sim A] \wedge (B \rightarrow C)$ seja verdade, por simplificação, temos
I. B é verdade
II. $(B \wedge C) \rightarrow \sim A$ é verdade
III $B \rightarrow C$ é verdade
Se em I. B é verdade e em II. $B \rightarrow C$ é verdade, então por MP, C é verdade.
Se C é verdade e B é verdade, por conjunção, $C \wedge B$ é verdade. Se ~~C∧B~~ $B \wedge C$ é verdade e II. $(B \wedge C) \rightarrow \sim A$ é verdade, então por MP, $\sim A$ é verdade; ∴ o argumento é válido

h) $[A \to (B \vee C)] \wedge \sim B \wedge \sim C \to \sim A$

Suponhamos $[A \to (B \vee C)] \wedge \sim B \wedge \sim C$ é verdade, então por simplificação:

I. $A \to (B \vee C)$ é verdade

II. $\sim B$ é verdade

III. $\sim C$ é verdade

Em III e II. se $\sim B$ é verdade e $\sim C$ é verdade, então

IV. $(\sim B \wedge \sim C)$ é verdade por conjunção; usando lei de Morgan

$$\sim B \wedge \sim C = \sim (B \vee C)$$

logo $\sim (B \vee C)$ é verdade.

Se $\sim (B \vee C)$ é verdade e I. $A \to (B \vee C)$ é verdade, então, por Modus tollens, $\sim A$ é verdade; $\therefore$ o argumento é válido.

2. Prove as equivalências

a) Lei de Morgan

$\sim(P \land Q) \equiv \sim P \lor \sim Q$

$\sim(P \lor Q) \equiv \sim P \land \sim Q$

P	Q	$P \land Q$	$P \lor Q$	$\sim(P \land Q)$	$\sim(P \lor Q)$	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \lor \sim Q$	$\sim P \land \sim Q$
V	V	V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	F	V	V	F
F	V	F	V	V	F	V	F	V	F
F	F	F	F	V	V	V	V	V	V

b) Lei comutativa

$P \land Q \equiv Q \land P$

$P \lor Q \equiv Q \lor P$

P	Q	$P \land Q$	$P \lor Q$	$Q \land P$	$Q \lor P$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F

c) Lei associativa

$P \land (Q \land R) \equiv (P \land Q) \land R$

$P \lor (Q \lor R) \equiv (P \lor Q) \lor R$

P	Q	R	$(Q \land R)$	$P \land (Q \land R)$	$(P \land Q)$	$(P \land Q) \land R$	$(Q \lor R)$	$P \lor (Q \lor R)$	$(P \lor Q)$	$(P \lor Q) \lor R$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	F	V	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

d) Lei da Idempotência

$P \wedge P \equiv P$ $\quad$ $P \vee P \equiv P$

P	P	$P \wedge P$	$P \vee P$
V	V	V	V
F	F	F	F

e) Lei Distributiva

$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F	F	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

f) Lei da Adsorção

$P \vee (P \wedge Q) = P$

$P \wedge (P \vee Q) = P$

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \vee (P \wedge Q)$	$P \wedge (P \vee Q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F

g) Lei da negação dupla

$\sim\sim p \equiv p$

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V	F	V
F	V	F

tilibra