UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPTO. DE ESTATÍSTICA

LISTA 2 – CE304 TEORIA DA PROBABILIDADE 1

Prof. Benito Olivares Aguilera 2025/1

Cálculo de Probabilidades e propriedades

1. Um dado honesto é lançado duas vezes e as faces resultantes observadas.
Considere os eventos:
A = "a soma dos resultados e ímpar";
B = "o resultado do primeiro lançamento e ímpar";
C = "o produto dos resultados e ímpar".
Calcule as probabilidades desses eventos definindo um espaço de probabilidade a partir de:
i) $\Omega_1 = \{(\omega_i, \omega_j)/1 \leq \omega_i \leq 6,\ i, j = 1,2, \cdots, 6\}$
ii) $\Omega_2 = \{(p,p),(p,i),(i,p),(i,i)\}$, onde p e i denotam a ocorrência de face par e ímpar, respectivamente.
Comente sobre as vantagens de utilizar um ou outro espaço amostral.

2. Considere $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ um espaço amostral. Verifique que a função dada por:

$$f(\omega) = \frac{|\omega - 3|}{9}, \forall \omega \epsilon \Omega,$$

que é aditiva para a união de conjuntos disjuntos, é uma probabilidade na sigma-álgebra das partes de Ω. Se considerarmos esse espaço de probabilidade como modelo para o lançamento de um dado, podemos afirmar que tanto faz apostar nos ímpares ou nos pares?

3. Sejam $A_1, A_2, \ldots$ eventos aleatórios. A partir dos Axiomas de Kolmogorov mostre que
a) $P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P(A_K{}^c)$.
b) Se $P(A_k) \geq 1 - \varepsilon$, para $k=1, 2, \ldots, n$, então $P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \geq 1 - n\varepsilon$.
c) $P(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k{}^c) \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.

4. Sejam *A*, *B* e *C* eventos aleatórios num mesmo espaço de probabilidade. Mostre formalmente que
a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
b) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
c) $P(A^c \cup B) = P(A \cap B) - P(A) + 1$.
d) $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$.

5. Considere dois eventos *A* e *B* mutuamente exclusivos, com $P(A) = 0{,}3$ e $P(B) = 0{,}5$.
Calcule:
a) $P(A \cup B)$.

b) $P(A/B)$.
c) $P(A^c \cap B^c)$.

6. Sendo $P(\ A) = 3/4$ e $P(\ B) = 3/8$, verifique se é possível:
a) $P(\ A \cup B) \leq\ 3/4$.
b) $1/8\ \leq P(\ A\ \cap\ B) \leq 3/8$.

7. Sejam A e B os eventos respectivos em que dois contratos I e II, digamos, são concluídos no prazo certo. Suponha as seguintes probabilidades: $P(\text{pelo menos um contrato ser concluído no prazo}) = 0{,}9$
$P(\text{ambos os contratos serem concluídos no prazo}) = 0{,}5$.
Calcule a probabilidade de exatamente um contrato ser concluído no prazo.

8. Três cartas são retiradas de um baralho, ao acaso e sem reposição. Qual a probabilidade de ao menos uma delas ser um ás?

9. Um dado é tal que a probabilidade de cada ponto é proporcional ao valor do ponto. Se você ganha 10 reais se sair um número par e perde 10 reais se sair ímpar, seria um jogo justo utilizando esse dado? Com quais valores de prêmio você aceitaria jogar com esse dado?

10. Uma universidade tem 8 mil alunos dos quais 2 mil são considerados esportistas. Temos, ainda, que 400 alunos são do curso de Economia diurno, 550 da Economia noturno, 250 são esportistas e da Economia diurno e 150 são esportistas e da Economia noturno. Um aluno é escolhido, ao acaso, e pergunta-se a probabilidade de:
a) Ser esportista.
b) Não ser da Economia.
c) Ser esportista ou aluno da Economia.
d) Não ser esportista, nem aluno da Economia.
e) Sabendo que o aluno escolhido não é esportista, qual a probabilidade de não ser aluno da Economia?

11. Escolhe-se ao acaso um número entre 1 e 50. Se o número é primo, qual a probabilidade que ele seja ímpar?

12. Uma ligação telefónica pode ocorrer a qualquer instante entre 9:00 e 11:00h. Qual a probabilidade que ela ocorra entre 9:30 e 10:45h?

13. Seleciona-se, ao acaso, um ponto (x, y) do retângulo $R = \{(x, y)/0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b\}$, com a e b positivos. Determine a probabilidade:
a) Da abscissa x ser inferior à ordenada y.
b) Do ponto satisfazer a desigualdade $bx + ay \leq ab/2$.
c) Do ponto satisfazer a desigualdade $x + y < 1/3$.

14. Uma urna contém m bolas brancas (numeradas de 1 até m) e n bolas pretas (numeradas de 1 até n). Retiram-se, de forma aleatória e sem reposição, duas bolas dessa urna.

a) Forneça um espaço amostral para esse experimento

b) Seja o evento $A =$ "a soma dos números das duas bolas não excede 3". Encontre o subconjunto correspondente a esse evento.

c) Calcule a probabilidade do evento A se $m = 15$ e $n = 25$.

15. (Urna de Pólya) Una urna contém *a* bolas azuis e *b* bolas brancas. Una bola é retirada ao acaso e depois devolvida à urna junto com mais *c* bolas da mesma cor. A seguir, uma segunda bola é retirada aleatoriamente da urna. Qual a probabilidade que ela seja azul?

16. Uma estudante leva dois livros para ler durante as férias. A probabilidade de ela gostar do primeiro livro é de 0,5, de gostar do segundo livro é de 0,4 e de gostar de ambos os livros é de 0,3. Qual é a probabilidade de que ela não goste de nenhum dos livros?

17. Se três bolas são retiradas aleatoriamente de um recipiente contendo 6 bolas brancas e 5 bolas pretas, qual é a probabilidade de que uma das bolas seja branca e as outras duas sejam pretas?

Independência

18. Se *A* e *B* são independentes, prove que também são independentes:

a) A e B^c

b) A^c e B

c) A^c e B^c.

19. Suponha que A, B e C são eventos mutuamente independentes. Mostre que

$P(C/A \cap B) = P(C)$.

20. Em que caso dois eventos disjuntos sempre serão independentes?

21. Mostre que eventos certos ou eventos impossíveis são independentes de qualquer outro evento.

22. Seja Q o quadrado unitário no plano. Defina os seguintes eventos:

$A = \{(x, y)/0 \leq x \leq 1/2, 0 \leq y \leq 1\}$ e

$B = \{(x, y)/0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1/4\}$.

Mostre que A e B são independentes.

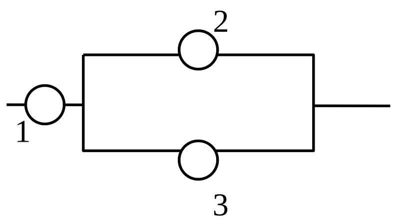
23. Sejam A, B e C eventos em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que nunca ocorrem simultaneamente e são independentes a pares. Se $P(A) = P(B) = P(C) = x$, encontre o maior valor possível para x.

24. Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ eventos aleatórios independentes tais que $P(A_i) = p_i, i = 1,2, \cdots, n$. Obtenha a probabilidade dos seguintes eventos, em termos das probabilidades p_i :

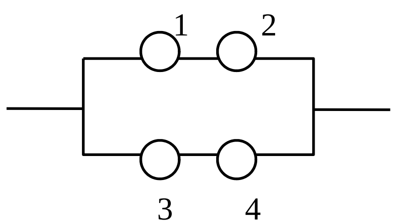
a) A ocorrência de nenhum dos A_i.
b) A ocorrência de pelo menos um dos A_i.
c) A ocorrência de exatamente um dos A_i.
e) A ocorrência de todos os A_i.

25. Supondo que todos os componentes dos sistemas da Figura tenham a mesma confiabilidade p e funcionem independentemente, obtenha a confiabilidade dos sistemas.

a)



b)



26. Uma caixa contém 4 bolas, cada uma rotulada com as letras a, b, c e d. Uma bola será escolhida ao acaso e são definidos os eventos $E_1 = \{ a, b\}$, $E_2 = \{ a, c\}$ e $E_3 = \{ a, d\}$. Verifique que esses eventos são independentes dois a dois, mas não são (coletivamente) independentes.

Probabilidade Condicional e Teorema de Bayes

27. Se P(B) = 0,4; P(A) = 0,7 e $P(A \cap B)$= 0,3; calcule P(A/B^c).

28. Verifique se são válidas as afirmações:
a) Se P(A) = 1/3 e P(B/A) = 3/5 então A e B não podem ser disjuntos.
b) Se P(A) = 1/2 , P(B/A) = 1 e P(A/B) = 1/2 então A não pode estar contido em B.

29. Suponha que a população de uma certa cidade é composta por 40% de homens e 60% de mulheres. Suponha que 50% dos homens e 30% das mulheres são fumantes. Encontre a probabilidade de que um fumante, escolhido ao acaso, seja homem.

30. Três máquinas I, II, e III produzem 30%, 30%, e 40%, respectivamente, do total da produção de certo item. Sabe-se que dos itens produzidos por elas, 4%, 3%, e 2%, respectivamente, são defeituosos. Um item é escolhido aleatoriamente da produção total e testado.

a) Qual a probabilidade que o item escolhido seja defeituoso?

b) Se o item selecionado resultou ser defeituoso, qual a probabilidade que ele tenha sido produzido pela máquina I?

c) Repetir a questão b) para as máquinas II e III.

31. (Moeda de Bertrand) Há três caixas idênticas. A primeira contém duas moedas de ouro, a segunda contém uma moeda de ouro e outra de prata, e a terceira, duas moedas de prata. Uma caixa é selecionada ao acaso e da mesma é escolhida uma moeda, também ao acaso. Se a moeda escolhida é de ouro, qual a probabilidade de que a outra moeda da caixa escolhida também seja de ouro?

32. Um teste laboratorial de sangue consegue detectar uma certa doença em 95% dos casos, quando ela realmente está presente. Sabe-se que um falso positivo (isto é, o teste acusar a doença em uma pessoa saudável) ocorre em 1% dos casos. Se atualmente 0.5% da população apresenta essa doença, qual a probabilidade de uma pessoa realmente ser portadora da doença se o seu teste resultou positivo?

33. Suponha que em um teste de múltipla escolha, a probabilidade de um aluno saber a resposta correta é p. Havendo n alternativas, se ele sabe a resposta ele responde corretamente com probabilidade 1; se não sabe, ele “chuta” (escolhe aleatoriamente) uma alternativa. Qual a probabilidade que ele sabia a resposta, dado que a pergunta foi respondida corretamente? Calcule o limite desta probabilidade se (i) $n \to \infty$ com p fixo e (ii) $p \to 0$ com n fixo.