UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPTO. DE ESTATÍSTICA

4ª LISTA DE EXERCICIOS CE304 – TEORIA DA PROBABILIDADE 1

Prof. Benito Olivares Aguilera 2024-1

MODELOS DISCRETOS.

1. Um professor aplica uma prova surpresa em determinada turma. São apresentadas 30 questões do tipo certo-errado. Supondo que todos os alunos respondem as questões ao acaso (chutando), o que é mais provável encontrar na turma: um aluno que acertou 80% das questões ou um aluno que acertou apenas 10% das questões? Responda de forma intuitiva e depois faça o cálculo para avaliar sua resposta.

2. Se X é uma variável aleatória binomial com valor esperado 6 e variância 2,4, determine $P[(0 \leq X - 1 \leq 8)^c]$.

3. Em um experimento binomial com 3 provas, a probabilidade de exatamente 2 sucessos é 12 vezes a probabilidade de 3 sucessos. Encontre p.

4. Um sistema de comunicação é formado por n componentes, cada um dos quais irá, independentemente, funcionar com probabilidade p. O sistema total funciona de forma efetiva se pelo menos metade de seus componentes também funcionar.
Para que valores de p um sistema com 5 componentes tem maior probabilidade de funcionar corretamente do que um sistema de 3 componentes?

5. Seja $X \sim Bin(n,p)$.
a) Prove a seguinte fórmula recursiva:
$$P(X = k+1) = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n-k}{k+1} P(X = k).$$
b) Para $n = 6$ e $p = 0{,}4$ calcule inicialmente $P(X = 0)$ e logo aplique a fórmula recursiva para obter os valores da função de probabilidade de X.

6. Sabe-se que os parafusos produzidos por certa empresa têm probabilidade de 0,01 de apresentar defeitos, independentemente uns dos outros. A empresa vende os parafusos em pacotes com 10 e oferece garantia de devolução de dinheiro se mais de 1 parafuso em 10 apresentar defeito. Que proporção de pacotes vendidos a empresa deve trocar?

7. Em um certo tipo de fabricação de fibra ótica, ocorrem cortes na fibra a uma taxa de 1 a cada 600 metros. Qual a probabilidade de que um rolo com 600 metros de fibra tenha:
a) nenhum corte?
b) no máximo dois cortes?
c) pelo menos dois cortes?

8. Seja $X \sim Poisson(\lambda)$. Responda:
a) Se $P(X = 1) = P(X = 2)$ qual o valor de $P(X < 4)$?
b) Se $P(X = 1) = 0{,}1$ e $P(X = 2) = 0{,}2$ quanto vale $P(X = 3)$?

9. Suponha que uma impressora de alta velocidade cometa erros, segundo um modelo de Poisson com uma taxa de 2 erros por página.

a) Qual é a probabilidade de encontrar pelo menos 1 erro em uma página escolhida ao acaso?
b) Se 5 páginas são sorteadas, ao acaso e de forma independente, qual é a probabilidade de pelo menos 1 página com pelo menos 1 erro por página?
c) Dentro das condições de b), considere a variável que conta o número de páginas com pelo menos um erro. Você identifica o modelo dessa variável?

10. Suponha que a probabilidade de que um item produzido por uma máquina seja defeituoso é de 0,2. Se 10 itens produzidos por esta máquina são selecionados ao acaso, qual é a probabilidade de que não mais do que um defeituoso seja encontrado? Use a binomial e a aproximação de Poisson, e compare os resultados.

11. Seja $X \sim Geo(p)$. Prove que

$$P(X \leq k) = 1 - (1-p)^{k+1}, k = 0,1,2,\cdots.$$

12. Suponha que a duração (em centenas de horas) de uma lâmpada especial siga o modelo Geométrico com parâmetro $p = 0,7$. Determine a probabilidade da lâmpada:
a) Durar menos de 500 horas.
b) Durar mais de 200 e menos de 400 horas.
c) Sabendo-se que vai durar mais de 300 horas, durar mais de 800 horas.
d) O item anterior é uma aplicação de um resultado geral conhecido como "falta de memória" do modelo Geométrico. Assim, mostre que para $X \sim Geo(p)$ e quaisquer números inteiros positivos m e n, vale

$$P(X > m + n / X > m) = P(X > n).$$

13. Por engano 3 peças defeituosas foram misturadas com boas formando um lote com 12 peças no total. Escolhendo ao acaso 4 dessas peças, determine a probabilidade de encontrar:
a) Pelo menos 2 defeituosas.
b) No máximo 1 defeituosa.
c) No mínimo 1 boa.

14. Uma pessoa fica lançando um dado honesto até obter pela quarta vez o número 6. Seja X o número de lançamentos realizados.
a) Encontre a probabilidade de a pessoa parar com 10 lançamentos.
b) Determine o valor esperado e a variância do número de lançamentos.

15. Considere um dado equilibrado. Para cada uma das situações abaixo, obtenha a função de probabilidade da variável de interesse e identifique o modelo, se possível.
a) O dado é lançado 3 vezes, de forma independente. Estamos interessados no número de vezes em que ocorreu face 1.
b) O dado é lançado 3 vezes, de forma independente. Estamos interessados no número de repetições de faces sorteadas.
c) O dado é lançado sucessivamente, de forma independente, até ocorrer a face 6. Estamos interessados em quantos lançamentos foram necessários.
d) O dado é lançado 3 vezes, mas a face ocorrida num lançamento é "retirada" para o próximo sorteio. Estamos interessados no número de faces ímpares obtidas.

MODELOS CONTÍNUOS.

16. Com o objetivo de verificar a resistência à pressão de água, os técnicos de qualidade de uma empresa inspecionam os tubos de PVC produzidos. Os tubos inspecionados têm 6 metros de comprimento e são submetidos a grandes pressões até o aparecimento do primeiro vazamento em qualquer ponto do seu comprimento, cuja distância a uma das extremidades (fixada à priori) é anotada para fins de análise posterior. Escolhe-se um tubo, ao acaso, para ser inspecionado. Calcular a probabilidade de que o vazamento esteja, no máximo, a um metro das extremidades.

17. Seja $X \sim U(-\alpha, \alpha)$, determine o valor do parâmetro α de modo que:
a) $P(-1 < X < 2) = 3/4$.
b) $P(|X| < 1) = P(|X| > 2)$.

18. Se $X \sim U(-1/2, 1/2)$, calcule $E(X - 1/2)^2$.

19. Verifique que a distribuição exponencial satisfaz a propriedade de "Falta de Memória", isto é, se $X \sim \exp(\lambda)$ então
$$P(X > s + t / X > s) = P(X > t); s, t > 0.$$

20. Supondo que a expectativa de vida siga um modelo exponencial de média 60 anos.
a) Determine, para um indivíduo escolhido ao acaso, a probabilidade de viver pelo menos até os 70 anos.
b) Idem para morrer antes dos 70, sabendo-se que o indivíduo acabou de completar 50 anos.
c) Calcule o valor de m tal que $P(X > m) = 1/2$.

21. Suponha que o tempo de vida T de um vírus exposto ao meio ambiente segue uma distribuição exponencial com $\lambda = 1/20\ s$. Calcule a probabilidade condicional $P(T > 15 / T > 10)$.

22. Na distribuição $X \sim N(100, 100)$, encontre:
a) $P(X < 115)$, (R: 0.933)
b) $P(X \geq 80)$, (R: 0.977)
c) $P(|X - 100| \leq 10)$, (R: 0.6827)
d) o valor de a, tal que $P(100 - a \leq X \leq 100 + a) = 0{,}95$.

23. As vendas de um determinado produto têm distribuição aproximadamente normal, com média 500 e desvio padrão 50. Se a empresa decide fabricar 600 unidades no mês em estudo, qual é a probabilidade de que não possa atender a todos os pedidos desse mês, por estar com a produção esgotada?

24. As alturas de 10.000 alunos de um colégio têm distribuição aproximadamente normal, com média 170 cm e desvio padrão 5 cm.
a) Qual o número esperado de alunos com altura superior a 1,65 cm?
b) Qual o intervalo simétrico em torno da média, que conterá 75% das alturas dos alunos?

25. Suponha que as amplitudes de vida de dois aparelhos elétricos, D_1 e D_2, tenham distribuições N(42, 36) e N(45, 9), respectivamente. Se o aparelho é para ser usado por período de 45 horas, qual aparelho deve ser preferido? E se for por um período de 49 horas?

26. Uma variável $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ representa o desempenho de um certo equipamento. Ele será considerado fora de controle se afastar de μ por mais de 2σ unidades. Cada dia, o equipamento é avaliado e, caso esteja fora de controle, será desligado e enviado para manutenção. Admita independência entre as avaliações diárias. Determine a probabilidade de:

a) No primeiro dia o equipamento ser desligado.
b) A primeira manutenção ser no décimo dia.
c) Você reconhece a variável que conta os dias anteriores à manutenção?

FUNÇÃO GERADORA DE MOMENTOS.

27. Calcule por definição a Função Geradora de Momentos para uma variável com distribuição:

a) $Geo(p)$;
b) $U(a, b)$;
c) $N(\mu, \sigma^2)$.

Para essas distribuições calcule sua esperança e variância utilizando a FGM.

28. Seja $X \sim Bin(10, 0.5)$. Encontre a esperança de $Y = 3X - 1$ utilizando a FGM.

29. Repita a questão anterior para $X \sim Poisson(2)$ e $Y = (2 - X)/3$.

30. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas segundo uma Normal Padrão. Encontre a distribuição de $X+Y$.

31. A FGM de uma v.a. X é dada por $M_X(t) = \frac{1}{8}(e^t + 1)^3$. Qual a distribuição de X?

32. Para $j = 1,2,3,4$, sejam $X_j \sim N(j\mu, \sigma^2)$ va´s independentes. Defina $Y = \sum_{j=1}^{4} (-1)^j X_j$.
Calcule, via FGM, a média e variância de Y.

33. Sejam X_1 e X_2 v.a's independentes tal que $X_j \sim Gama(\alpha_j, \beta)$, com $j = 1,2$. Encontre a distribuição de $Y = X_1 + X_2$.

FUNÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E MÉTODO DO JACOBIANO.

34. Seja $X \sim Geo(p)$, com $X \in \{0,1,2, \cdots\}$.Encontre a distribuição de $Y = X + 1$ e de $Z = \sqrt{X}$.

35. Seja X uma variável aleatória possuindo densidade $f(x)$. Encontrar a densidade de $Y = |X|$ pelo método da Função Distribuição e logo pelo método do Jacobiano.

36. Seja X uma variável aleatória cuja função de distribuição F é uma função contínua na reta. Prove que a distribuição de $Y = F(x)$ é $U(0,1)$.

37. Sejam X e Y duas va's iid $N(\mu, \sigma^2)$. Encontre a distribuição de $W = 2X - 3Y$.

38. Se $X \sim \exp(1/2)$, encontre a densidade de $Y = X^{1/2}$. Tal distribuição é chamada **Weibull** de parâmetros 2 e 1/2.

39. Seja $X \sim N(0,1)$, encontre a densidade de $Y = e^X$. Tal distribuição é chamada **Lognormal** de parâmetros 0 e 1.