UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPTO. DE ESTATÍSTICA

LISTA 3 – CE304 TEORIA DA PROBABILIDADE 1

Prof. Benito Olivares Aguilera 2024/1

Esperança, variância e momentos de variáveis aleatórias.

1. Uma turma com 120 estudantes é levada em 3 ônibus para a apresentação de uma orquestra sinfônica. Há 36 estudantes em um dos ônibus, 40 no outro e 44 no terceiro ônibus. Quando os ônibus chegam, um dos 120 estudantes é escolhido aleatoriamente.

a) Suponha que X represente o número de estudantes que vieram no mesmo ônibus do estudante escolhido. Determine $E(X)$.

b) Compare o valor esperado de X com a média de estudantes por ônibus. Explique possíveis diferenças.

2. Seja X uma variável aleatória com densidade $f(x) = 1 - |x|, -1 < x < 1$. Encontre o valor esperado de X pela definição.

3. Seja X uma v.a. com a seguinte função de distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < -2; \\ 1/8, -2 \leq x < 1; \\ 5/8, 1 \leq x < 2; \\ 7/8, 2 \leq x < 4 \\ 1, x \geq 4. \end{cases}$$

Encontrar a média e variância de X.

4. Suponha que um mecanismo eletrônico tenha um tempo de vida X (em unidades de 1.000 horas) que é considerado uma v.a. contínua com densidade:

$$f(x) = e^{-x}, x > 0.$$

a) Suponha que o custo de fabricação de um item seja 2,00 u.m. e o preço de venda seja 5,00 u.m. O fabricante garante total devolução se $X \leq 0{,}9$. Qual o lucro esperado por item?

b) Comprove que os momentos de X obedecem à seguinte fórmula:

$$E(X^k) = k!, k = 1,2, \ldots$$

c) Qual a variância de X?

5. Seja X uma v.a. qualquer. É valida a igualdade $E(1/X) = 1/E(X)$? Justifique.

6. A função de distribuição de X é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \frac{1}{18}(x^2 + x - 2), & 1 \leq x < 4; \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

a) Encontre $E(X)$ sem calcular a função densidade.

b) Encontre $E(X)$ calculando previamente a densidade.

7. Um jogador vai lançando uma moeda honesta. Ele para depois de lançar ou duas caras sucessivas ou duas coroas sucessivas. Qual o número médio de lançamentos? (Pode usar a segunda fórmula da Proposição 6.4 do Magalhães)

8. Uma v.a. X tem função de distribuição dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ x/4, & \text{se } 0 \leq x < 1; \\ 1/2, & \text{se } 1 \leq x < 2; \\ 1, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Como pode ser calculada $E(X)$?

9. Prove que para todo real α,

$$var(X) = E[(X-\alpha)^2] - [E(X) - \alpha]^2.$$

10. Seja X uma variável aleatória de média μ e variância σ^2 (sendo ambos os parâmetros finitos). Obtenha um limitante para a probabilidade $P(|X-\mu| < 2\sigma)$.

11. Suponha que se saiba que o número de itens produzidos por uma fábrica durante uma semana seja uma variável aleatória com média 50.

a) O que se pode dizer sobre a probabilidade de que a produção desta semana seja superior a 75 itens?

b) Se é sabido que a variância da produção de uma semana é igual a 25, então o que se pode dizer sobre a probabilidade de que a produção desta semana esteja entre 40 e 60?

Função Geradora de Momentos.

12. Prove que se $M_X(t)$ é a Função Geradora de Momentos de uma variável aleatória X, então:

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at), \; a \text{ e } b \text{ constantes.}$$

13. Suponha que X é massa pontual em c. Encontre sua FGM. Encontre também a FGM de $Y = 2X - 3$,

14. Seja X uma v.a. com distribuição dada por:

$$p(x) = \binom{30}{x} \frac{1}{2^{30}}, x = 1,2, \dots, 30.$$

Calcule a FGM.

15. Encontre a F.G.M. da v.a. X cuja densidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}.$$

Calcule alguns momentos de X e tente encontrar uma forma geral para eles.

Fórmulas matemáticas úteis

1. Série Geométrica:
   $\sum_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}, |r| < 1.$

2. Soma telescópica:
   $$\sum_{k=1}^{n} [a_k - a_{k+1}] = a_1 - a_{n+1}.$$
   (pode ser adaptada para séries).

3. Série de Dirichlet:
   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} < \infty, \text{ se } \alpha > 1.$$

4. Teorema do Binômio:
   $$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$